$z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \end{cases}$$

¿ ¿

1. **Графический метод**

Для графического решения преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12 \\ 4x_3 = -6x_1 + 4x_2 + 18 \end{cases} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12 \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_1 + x_2 + \frac{9}{2} \end{cases} \begin{cases} \frac{7}{2}x_1 - 7x_2 \ge \frac{21}{2} \\ \frac{3}{2}x_1 - x_2 \le \frac{9}{2} \end{cases}$$

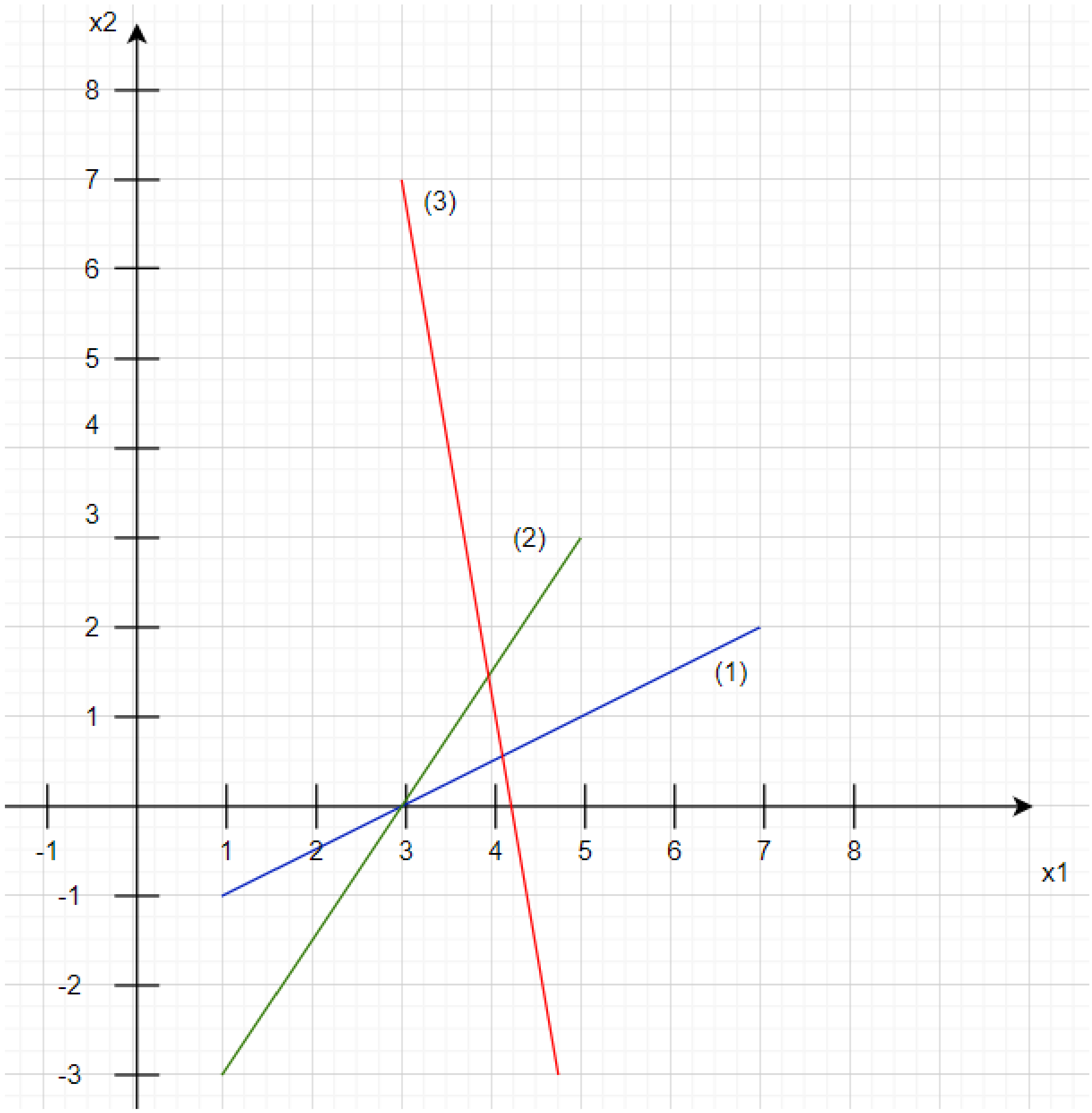
Целевая функция будет выглядеть следующим образом:

$z = -\frac{19}{2}x_1 + 6x_2 + \frac{45}{2} \rightarrow \max$

Ограничения задачи ЛП заданы неравенствами, значит это стандартная задача её можно решить графическим методом.

1) $\frac{7}{2}x_1 - 7x_2 \ge \frac{21}{2} \rightarrow \frac{7}{2}x_1 - 7x_2 = \frac{21}{2}$, точки для построения (3;0) и (1;-1); решение – полуплоскость выше прямой;
2) $\frac{3}{2}x_1 - x_2 \le \frac{9}{2} \rightarrow \frac{3}{2}x_1 - x_2 = \frac{9}{2}$, точки для построения (3;0) и (1;-3); решение – полуплоскость ниже прямой;
3) $6x_1 + x_2 \ge 25 \rightarrow 6x_1 + x_2 = 25$, точки для построения (4;1) и (3;7); решение – полуплоскость выше прямой;

Строим нулевой уровень ЦФ $z = -\frac{19}{2}x_1 + 6x_2 + \frac{45}{2} = 0$,прямая проходит через начало координат (0;0), вектор градиент функции $\vec{N} = (-\frac{19}{2}; 6)$.



Данная задача не имеет решений, так как ОДР – пустое множество.

Ответ: Решений нет.

2. **Симплекс метод.**

Необходимо привести исходные уравнения к канонической форме:

$$z=-2x_1+x_2+5x_3 \rightarrow \max$$

$$\left| 4x_1+2x_2+5x_3+x_4=12 ¿ \right| 6x_1-3x_2+4x_3=18 ¿¿¿¿$$

Запишем расширенную матрицу для данной системы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 12 \\ 6 & -3 & 4 & 0 & 0 & 18 \\ 3 & 3 & -2 & 0 & -1 & 16 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен 3.

Базисные переменные - x_3, x_4, x_5.

I базисное решение – (0;0; $\frac{9}{2}$;12;-16) – не является допустимым.

Переходим к методу искусственных переменных для поиска ДБР.

$w = x_6 + x_7 \rightarrow \min$

$$x_4 = 12 - 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 ¿ x_6 = 18 - 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 ¿¿¿¿$$

Базисные переменные - x_4, x_6, x_7.

БР: (0;0;0;12;0;18;16)

$w = 18 - 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 16 - 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 34 - 9x_1 - 2x_3 + x_5$ –ДБР, т.к. параметры БР не отрицательные, т.е. новая оптимизационная задача сформирована и имеет ДБР, поэтому мы можем запустить симплекс-алгоритм для поиска оптимального решения.

3. **Симплекс-алгоритм.**

Полученное ДБР не является оптимальным решением, так как есть отрицательные коэффициенты.

При увеличении x_1 функция убывает быстрее, поэтому:

$$x_4 = 12 - 4x_1 ¿ x_6 = 18 - 6x_1 ¿¿¿¿ \quad \begin{matrix} до & 3 \\ до & 3 \\ до & \frac{16}{3} \end{matrix}$$

$$x_1 = 3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{4}x_3 ¿ x_6 = 18 - 18 + \frac{3}{2}x_4 + 3x_2 + \frac{15}{2}x_3 + 3x_2 - 4x_3 = 6x_2 + \frac{7}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 ¿¿¿¿$$

$$w = 6x_2 + \frac{7}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 + 7 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{23}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + x_5 = 7 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{29}{4}x_3 + \frac{5}{2}x_4 + x_5$$

Оптимальное решение, так как все коэффициенты положительные.

Отсюда следует, что решений с w=0 не существует, т.е. исходная задача оптимального решения не имеет.

Ответ: нет решений.